ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 125 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-33-38

УДК 517

О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ[1] **, Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ**[1,2] **, Ричик СЕНГУПТА**[1]

[1] ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4595-6685, e-mail: zyxra2@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9916-8177, e-mail: veryricheek@hotmail.com

[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2686-4654, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

On exact triangle inequalities in (q_1, q_2)-quasimetric spaces

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA[1] **, Sergey E. ZHUKOVSKIY**[1,2] **, Richik SENGUPTA**[1]

[1] RUDN University

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4595-6685, e-mail: zyxra2@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9916-8177, e-mail: veryricheek@hotmail.com

[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation,

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2686-4654, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Аннотация. Для произвольного (q_1, q_2)-квазиметрического пространства доказано существование функции f, для которой f-неравенство треугольника точнее, чем (q_1, q_2)-неравенство треугольника. Показано, что найденная функция f является наименьшей функцией в классе вогнутых непрерывных функций g, для которых выполняется g-неравенство треугольника.

Ключевые слова: (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00106_а, 19-01-00080_а). Результаты §3 получены вторым автором при поддержке гранта РНФ (проект № 17-11-01168).

Для цитирования: *Жуковская З. Т., Жуковский С. Е., Сенгупта Р.* О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 33–38. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-33-38

Abstract. For arbitrary (q_1, q_2)-quasimetric space, it is proved that there exists a function f, such that f-triangle inequality is more exact than any (q_1, q_2)-triangle inequality. It is shown that this function f is the least one in the set of all concave continuous functions g for which g-triangle inequality hold.

Keywords: (q_1, q_2)-quasimetric space

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-01-00106_a, 19-01-00080_a). The results of Section 3 are due to the second author who was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01168).

For citation: Zhukovskaya Z. T., Zhukovskiy S. E., Sengupta R. O tochnikh neravenstvakh treugolnika v (q_1, q_2)-kvazimetricheskikh prostranstvakh [On exact triangle inequalities in (q_1, q_2)-quasimetric spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 33–38. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-33-38 (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение и постановка задачи

Пусть задано непустое множество X, функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ и числа $q_1 \geq 1$ и $q_2 \geq 1$. Говорят, что для функции ρ выполняется (q_1, q_2)-*неравенство треугольника*, если

$$\rho(x, z) \leq q_1\rho(x, y) + q_2\rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X. \tag{1}$$

Функция ρ называется (q_1, q_2)-*квазиметрикой*, если она удовлетворяет *аксиоме тождества*

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall\, x, y \in X$$

и (q_1, q_2)-неравенству треугольника. Понятие (q_1, q_2)-квазиметрического пространства было введено и изучено в [1].

Пусть (X, ρ) — (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство. Обозначим через Q множество всех пар $(q_1', q_2') \in [1, +\infty)\times[1, +\infty)$, для которых выполняется (q_1', q_2')-неравенство треугольника, т. е.

$$Q := \{(q_1', q_2') \in [1, +\infty) \times [1, +\infty) :\ \rho(x, z) \leq q_1'\rho(x, y) + q_2'\rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X\}.$$

Очевидно, что множество Q непусто, выпукло и замкнуто. Кроме того,

$$Q + \mathbb{R}^2_+ = Q.$$

Если множество Q представимо в виде $Q = \{(q_1, q_2)\} + \mathbb{R}^2_+$, то неравенство в (1) является самым точным из всех (q_1', q_2')-неравенств треугольника, имеющих место для пространства (X, ρ), т. е.

$$q_1\rho(x, y) + q_2\rho(y, z) \leq q_1'\rho(x, y) + q_2'\rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X, \quad \forall\, (q_1', q_2') \in Q.$$

В противном случае самого точного (q_1', q_2')-неравенства треугольника может не существовать. В связи с этим возникает естественный вопрос: существует ли функция $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\rho(x,z) \le f(\rho(x,y), \rho(y,z)) \le q_1'\rho(x,y) + q_2'\rho(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X, \quad \forall\,(q_1',q_2') \in Q, \tag{2}$$

и какими свойствами такая функция может обладать? Ответ на этот вопрос дают приведенные ниже предложение 2 и теорема 1.

Напомним, что соотношение

$$\rho(x,z) \le f(\rho(x,y), \rho(y,z)) \quad \forall\, x,y,z \in X \tag{3}$$

называется f-неравенством треугольника. Если для функции ρ выполнено f-неравенство треугольника, и аксиома тождества, то она называется f-квазиметрикой, а пространство (X, ρ) называется f-квазиметрическим.

2. Уточнение (q_1, q_2)-неравенства треугольника

Положим

$$f(r_1, r_2) := \inf_{(q_1',q_2') \in Q} (r_1 q_1' + r_2 q_2'), \quad (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{4}$$

Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $c(\cdot, A) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ опорную функцию множества A, т. е.

$$c(r_1, r_2, A) = \sup_{(a_1,a_2) \in A} (r_1 a_1 + r_2 a_2), \quad (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Предложение 1. *Функция $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ корректно определена (т. е. при любом $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$ инфимум в (4) существует), неотрицательна, непрерывна, вогнута и положительно однородна.*

Доказательство. При любом $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$, поскольку $Q \subset [1, +\infty) \times [1, +\infty)$ имеем

$$r_1 q_1' + r_2 q_2' \ge 0 \quad \forall\,(q_1', q_2') \in Q.$$

Следовательно, при любом $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$ инфимум в (4) существует.

Покажем теперь, что функция f является вогнутой, положительно однородной и непрерывной. Имеем

$$f(r_1, r_2) \equiv \inf_{(q_1',q_2') \in Q} (r_1 q_1' + r_2 q_2') \equiv - \sup_{(q_1',q_2') \in -Q} (r_1 q_1' + r_2 q_2') \equiv -c(r_1, r_2, -Q). \tag{5}$$

Опорная функция положительно однородна, выпукла и замкнута (см., например, [2, §1.7]). Поэтому из (5) следует, что функция f положительно однородна и вогнута. Кроме того, $\mathbb{R}^2_+$ лежит в эффективном множестве выпуклой функции $c(\cdot, Q)$. Поэтому (см., например, [2, §1.5]) сужение $c(\cdot, Q)$ на $\mathbb{R}^2_+$ полунепрерывно сверху. Отсюда, из замкнутости $c(\cdot, Q)$ и соотношения (5) следует, что функция f непрерывна. $\square$

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть функция f определена равенством* (4). *Тогда выполняется соотношение* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные точки $x, y, z \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Положим $r_1 := \rho(x, y)$ и $r_2 := \rho(y, z)$. Выберем $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in Q$ такие, что $\bar{q}_1 r_1 + \bar{q}_2 r_2 < f(r_1, r_2) + \varepsilon$. Тогда

$$\rho(x, z) \leq \bar{q}_1 r_1 + \bar{q}_2 r_2 < f(r_1, r_2) + \varepsilon = f(\rho(x, y), \rho(y, z)) + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ имеем $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z))$. Кроме того, из (4) следует, что

$$f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \leq q'_1 \rho(x, y) + q'_2 \rho(y, z)$$

для любых $(q'_1, q'_2) \in Q$. Соотношение (2) доказано. □

3. Сравнение неравенств треугольника

В связи с теоремой 1 представляется естественным найти наименьшую функцию $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ такую, что имеет место соотношение (2). Очевидно, что такой функцией является функция f, определенная равенством

$$f(r_1, r_2) = \sup\{\rho(x, z) : \ x, y, z \in X, \ \ \rho(x, y) = r_1, \ \ \rho(y, z) = r_2\},$$

если $\{x, y, z \in X : \ \ \rho(x, y) = r_1, \ \ \rho(y, z) = r_2\} \neq \emptyset$, и

$$f(r_1, r_2) = 0,$$

если $\{x, y, z \in X : \ \ \rho(x, y) = r_1, \ \ \rho(y, z) = r_2\} = \emptyset$.

Очевидно, что определенная таким образом функция f, как правило, меньше, чем функция f, определенная соотношением (4). Однако функция f, определенная соотношением (4), является наименьшей функцией, удовлетворяющих соотношению (3) $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \ \ \forall \ \ x, y, z \in X$, в классе вогнутых непрерывных положительно однородных функций. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция f определена равенством* (4). *Если некоторая функция $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ вогнута, положительно однородна, непрерывна и*

$$\rho(x, z) \leq g(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall\, x, y, z \in X, \tag{6}$$

то

$$f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \leq g(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall\, x, y, z \in X. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ вогнута, положительно однородна, непрерывна и удовлетворяет соотношению (6). Предположим, что (7) нарушается. Тогда существуют точки $x, y, z \in X$ такие, что $f(\rho(x, y), \rho(y, z)) > g(\rho(x, y), \rho(y, z))$. Значит, существуют $\bar{r}_1 > 0$ и $\bar{r}_2 > 0$ такие, что

$$f(\bar{r}_1, \bar{r}_2) > g(\bar{r}_1, \bar{r}_2). \tag{8}$$

Покажем, что существуют $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$g(r_1, r_2) \le c_1 r_1 + c_2 r_2 \quad \forall\, (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad g(\bar r_1, \bar r_2) = c_1 \bar r_1 + c_2 \bar r_2. \tag{9}$$

Поскольку функция g вогнута и непрерывна, то множество

$$A := \{(r_1, r_2, y) \in \mathbb{R}^3 : \ r_1 \ge 0, \ \ r_2 \ge 0, \ \ y \le g(r_1, r_2)\}$$

выпукло и замкнуто. Кроме того, точка $(\bar r_1, \bar r_2, g(\bar r_1, \bar r_2))$ не лежит во внутренности A. Поэтому из теоремы об отделимости (см., например, [2, §1.4]) следует, что существует ненулевой вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \in \mathbb{R}^3$ такой, что

$$\alpha_1 \bar r_1 + \alpha_2 \bar r_2 + \beta g(\bar r_1, \bar r_2) \ge \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \beta y \quad \forall\, (r_1, r_2, y) \in A. \tag{10}$$

Покажем, что $\beta > 0$. Предположим, что $\beta = 0$. Тогда из (10) следует, что точка $(\bar r_1, \bar r_2)$ отделима от $\mathbb{R}^2_+$, что невозможно, так как $\bar r_1 > 0$ и $\bar r_2 > 0$. Предположим, что $\beta < 0$. Тогда, поскольку при фиксированном $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+$ число y можно выбрать сколь угодно малым, то правая часть в (9) может быть сколь угодно большой, что невозможно. Итак, $\beta > 0$. Поэтому далее, не ограничивая общности, будем считать, что $\beta = 1$.

Умножим неравенство в (10) на произвольное $\varepsilon > 0$. В силу положительной однородности функции g имеем

$$\varepsilon(\alpha_1 \bar r_1 + \alpha_2 \bar r_2 + \beta g(\bar r_1, \bar r_2)) \ge \alpha_1 \varepsilon r_1 + \alpha_2 \varepsilon r_2 + y \quad \forall\, (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad \forall\, y \le g(\varepsilon r_1, \varepsilon r_2).$$

Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\varepsilon(\alpha_1 \bar r_1 + \alpha_2 \bar r_2 + \beta g(\bar r_1, \bar r_2)) \ge \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + y \quad \forall\, (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad \forall\, y \le g(r_1, r_2).$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ имеем

$$0 \ge \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + y \quad \forall\, (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+, \quad \forall\, y \le g(r_1, r_2),$$

и, следовательно,

$$g(r_1, r_2) \le -\alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2 \quad \forall\, (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{11}$$

Далее, подставляя $r_1 = \bar r_1/2$, $r_2 = \bar r_2/2$, $y = g(r_1, r_2)$ в неравенство (10), получаем

$$\alpha_1 \bar r_1 + \alpha_2 \bar r_2 + g(\bar r_1, \bar r_2) \ge 0.$$

Отсюда и из (11) получаем, что $g(\bar r_1, \bar r_2) = -\alpha_1 \bar r_1 - \alpha_2 \bar r_2$. Таким образом, (9) выполняется с $c_1 = -\alpha_1$ и $c_2 = -\alpha_2$.

Из (6) и (9) следует, что

$$\rho(x, z) \le g(\rho(x, y), \rho(y, z)) \le c_1 \rho(x, y) + c_2 \rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X.$$

Полагая $y = z$ и $x \ne y$ в этом неравенстве, получаем $c_1 \ge 1$; полагая $x = y$ и $y \ne z$ в этом неравенстве, получаем $c_2 \ge 1$. Следовательно, $(c_1, c_2) \in Q$. Поэтому из (4) и (10) следует, что

$$f(\bar r_1, \bar r_2) \le c_1 \bar r_1 + c_2 \bar r_2 = g(\bar r_1, \bar r_2).$$

Это неравенство противоречит неравенству (8). Полученное противоречие доказывает неравенство (7). $\square$

Список литературы

[1] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *ДАН*, **469**:5 (2016), 527–531.

[2] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014.

References

[1] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[2] A. V. Arutyunov, *Lectures on Convex and Set-Valued Analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2014 (In Russian).

Информация об авторах

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник центра нелинейного анализа и оптимизации. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Жуковский Сергей Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник центра нелинейного анализа и оптимизации. Российский университет дружбы народов, г. Москва, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Сенгупта Ричик, аспирант, факультет физико-математических и естественных наук. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: veryricheek@hotmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9916-8177

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковский Сергей Евгеньевич
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 27.02.2019 г.
Принята к публикации 28.03.2019 г.

Information about the authors

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher at the Center for Nonlinear Analysis and Optimization. RUDN University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Sergey E. Zhukovskiy, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher at the Center for Nonlinear Analysis and Optimization. RUDN University, Moscow, Senior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Richik Sengupta, Post-Graduate Student, Faculty of Physics, Mathematics and Natural Sciences. RUDN University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: veryricheek@hotmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9916-8177

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Sergey E. Zhukovskiy
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Received 24 January 2019
Reviewed 27 February 2019
Accepted for press 28 March 2019